

Atomska fizika 2019/2020
Kontinuumska stanja, fotoionizacija,
kotne porazdelitve fotoelektronov

Andrej Mihelič

8. januar 2020

Ravni val, razvoj po parcialnih valovih

- Ravne valove lahko zapišemo v bazi sfernih funkcij (funkcijska analiza, MaFi):

$$e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell + 1) i^{\ell} j_{\ell}(kr) P_{\ell}(\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{r}}) = 4\pi \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} i^{\ell} j_{\ell}(kr) Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{r}}) Y_{\ell m}^*(\hat{\mathbf{k}}).$$

- Izraz lahko uporabimo za zapis kontinuumske valovne funkcije delca v konstantnem potencialu, ($H = \mathbf{p}^2/(2m) + V_0$, $V_0 = \text{konst.}$):

$$H\phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = E\phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \frac{\hbar^2\mathbf{k}^2}{2m}\phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}),$$

$$\phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \langle \mathbf{r} | \mathbf{k} \rangle \equiv (2\pi)^{-3/2} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} i^{\ell} j_{\ell}(kr) Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{r}}) Y_{\ell m}^*(\hat{\mathbf{k}}),$$

$$\int d^3r \phi_{\mathbf{k}'}^*(\mathbf{r}) \phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \langle \mathbf{k}' | \mathbf{k} \rangle = \delta^{(3)}(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) = k^{-2} \delta(k' - k) \delta^{(2)}(\Omega_{\mathbf{k}'} - \Omega_{\mathbf{k}}).$$

- Rešitev lahko zapišemo s funkcijami, normiranimi na E interval:

$$\phi_{E,\hat{\mathbf{k}}}(\mathbf{r}) = \sqrt{\frac{\hbar^2 k}{m}} \phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}), \quad \int d^3r \phi_{E',\hat{\mathbf{k}'}}^*(\mathbf{r}) \phi_{E,\hat{\mathbf{k}}}(\mathbf{r}) = \delta(E' - E) \delta^{(2)}(\Omega_{\mathbf{k}'} - \Omega_{\mathbf{k}}).$$

Sipalni problem, I.

- Kako se modificira $\phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ ob prisotnosti potenciala? Zanima nas rešitev problema

$$H|\psi\rangle = (H_0 + V)|\psi\rangle = E|\psi\rangle,$$

ko že poznamo (asimptotske) rešitve $H_0|\phi\rangle = E|\phi\rangle$. Obravnavamo primer, ko je $E = \text{konst.}$ (Možna je tudi obravnava neelastičnega sipanja, če projektil in tarčo obravnavamo kot skupen sistem: $H_0 = H_0^p \oplus H_0^t$, $|\phi\rangle = |\phi_p\rangle \otimes |\phi_t\rangle$ ipd.) Enačbo obrnemo in zapišemo splošno rešitev:

$$|\psi\rangle = |\phi\rangle + (E - H_0)^{-1}V|\psi\rangle.$$

Prvi člen (ϕ) opisuje vpadno valovno funkcijo (npr. ravni val, če H_0 opisuje proste delce), drugi člen pa sipani val.

- Operator $G_0(E) = (E - H_0)^{-1}$ je Greenov operator za nemoten sistem. Popravimo ga, da opiše potujoče valovanje (in da ni divergenten na realni osi). Vpeljemo retardirani (+) in avansirani (−) Greenov operator:

$$G_0^\pm(E) = (E \pm i\eta - H_0)^{-1},$$

kjer na koncu naredimo limito $\eta \rightarrow 0^+$. Popravek je posledica regularizacije $V \rightarrow Ve^{-\eta|t|}$ [1, 2], s katero zadušimo hitre oscilacije pri $t \rightarrow \pm\infty$.

Sipalni problem, II.

- Dobimo dve sipalni rešitvi (rešitvi Lippman-Schwingerjevih enačb):

$$|\psi^\pm\rangle = |\phi\rangle + G_0^\pm(E)V|\psi^\pm\rangle.$$

- Enačbo $|\psi^\pm\rangle = |\phi\rangle + G_0^\pm(E)V|\psi^\pm\rangle$ lahko rešujemo iterativno (Bornova vrsta):

$$|\psi_0^\pm\rangle = |\phi\rangle,$$

$$|\psi_1^\pm\rangle = |\phi\rangle + G_0^\pm(E)V|\psi_0^\pm\rangle,$$

$$|\psi_2^\pm\rangle = |\phi\rangle + G_0^\pm(E)V|\psi_1^\pm\rangle,$$

...

$$\begin{aligned} |\psi^\pm\rangle &= |\phi\rangle + G_0^\pm(E)V|\phi\rangle + G_0^\pm(E)V G_0^\pm(E)V|\phi\rangle + \dots \\ &= |\phi\rangle + G^\pm(E)V|\phi\rangle, \end{aligned}$$

kjer je $G^\pm(E) = (E \pm i\eta - H)^{-1} = (E \pm i\eta - H_0 - V)^{-1}$.

- Približku, pri katerem uporabimo ravne valove namesto “pravih” rešitev, pravimo (prva) Bornova aproksimacija.

Sipalni problem, III.

- Zaenkrat se omejimo na potencialne kratkega dosega: $V(\mathbf{r}) \sim 1/r^{1+\Delta}$.
- Pokažemo lahko [3], da je za $H_0 = \mathbf{p}^2/(2m)$ in $\langle \mathbf{r} | G_0^\pm | \mathbf{r}' \rangle = G_0^\pm(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$

$$G_0^\pm(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{\pm ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}, \quad (\nabla^2 + k^2)G_0^\pm(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}'),$$

$$\psi^\pm(\mathbf{r}) = \phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) - \frac{2m}{\hbar^2} \int d^3r' \frac{e^{\pm ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} V(\mathbf{r}') \psi^\pm(\mathbf{r}').$$

- Če opazujemo v smeri od tarče (postavimo $\mathbf{k}' = k \hat{\mathbf{r}}$), velja:

$$\psi^+(\mathbf{r}) \sim (2\pi)^{-3/2} \left\{ e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + \frac{e^{ikr}}{r} f(\mathbf{k}', \mathbf{k}) \right\},$$

$$f(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = -4\pi^2 \frac{m}{\hbar^2} \langle \phi_{\mathbf{k}'} | V | \psi^+ \rangle,$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\mathbf{k}', \mathbf{k})|^2.$$

Krogelno simetrični potencial (kratek doseg), I.

- Kadar je potencial krogelno simetričen ($\hat{\mathbf{k}}' \cdot \mathbf{k} = \cos \theta$, δ_ℓ – fazni premik ℓ -tega vala) [2, 3]:

$$f(\mathbf{k}', \mathbf{k}) \equiv f(k, \theta) = \sum_{\ell} (2\ell + 1) f_{\ell} P_{\ell}(\cos \theta),$$

$$f_{\ell} = \frac{e^{2i\delta_{\ell}} - 1}{2ik} = \frac{e^{i\delta_{\ell}} \sin \delta_{\ell}}{k},$$

$$\sigma = \int d\Omega |f(k, \theta)|^2 = \frac{4\pi}{k} \sum_{\ell} (2\ell + 1) \sin^2 \delta_{\ell}.$$

- Rešitve zapišemo na podoben način [2]:

$$\psi^+(\mathbf{r}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} i^{\ell} e^{i\delta_{\ell}(k)} R_{k\ell}(r) Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{r}}) Y_{\ell m}^*(\hat{\mathbf{k}}),$$

$$R_{k\ell}(r) \sim \cos \delta_{\ell} j_{\ell}(kr) - \sin \delta_{\ell} n_{\ell}(kr).$$

Radialna funkcija je torej fazno premanjena, $R_{k\ell}(r) \sim \sin(x - \ell\pi/2 + \delta_{\ell})$, saj je

$$j_{\ell}(x) \sim x^{-1} \sin(x - \ell\pi/2) \quad \text{in} \quad n_{\ell}(x) \sim -x^{-1} \cos(x - \ell\pi/2),$$

in še dodatno pomnožena s faznim faktorjem.

Coulombski potencial, I.

- Tu postavimo $V(r) = -Z\hbar c\alpha/r$. Ker ima potencial dolg doseg, se fazna razlika “akumulira”. Rešitev zapišemo kot:

$$\psi_{\mathbf{k}}^+(\mathbf{r}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} i^{\ell} e^{i\sigma_{\ell}} \frac{F_{\ell}(kr; \eta)}{kr} Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{r}}) Y_{\ell m}^*(\hat{\mathbf{k}}).$$

$$\eta = -Zm c\alpha / (\hbar k)$$

$$\sigma_{\ell}(k) = \arg \Gamma(\ell + 1 + i\eta)$$

Sommerfeldov parameter
coulombski fazni premik

- Regularna coulombska funkcija ($\rho = kr$) [4, 5]:

$$F_{\ell}(\rho; \eta) = \frac{2^{\ell} e^{-\pi\eta/2} |\Gamma(\ell + 1 - i\eta)|}{(2\ell + 1)!} \rho^{\ell+1} e^{i\rho} {}_1F_1(\ell + 1 + i\eta, 2\ell + 2, -2i\rho),$$

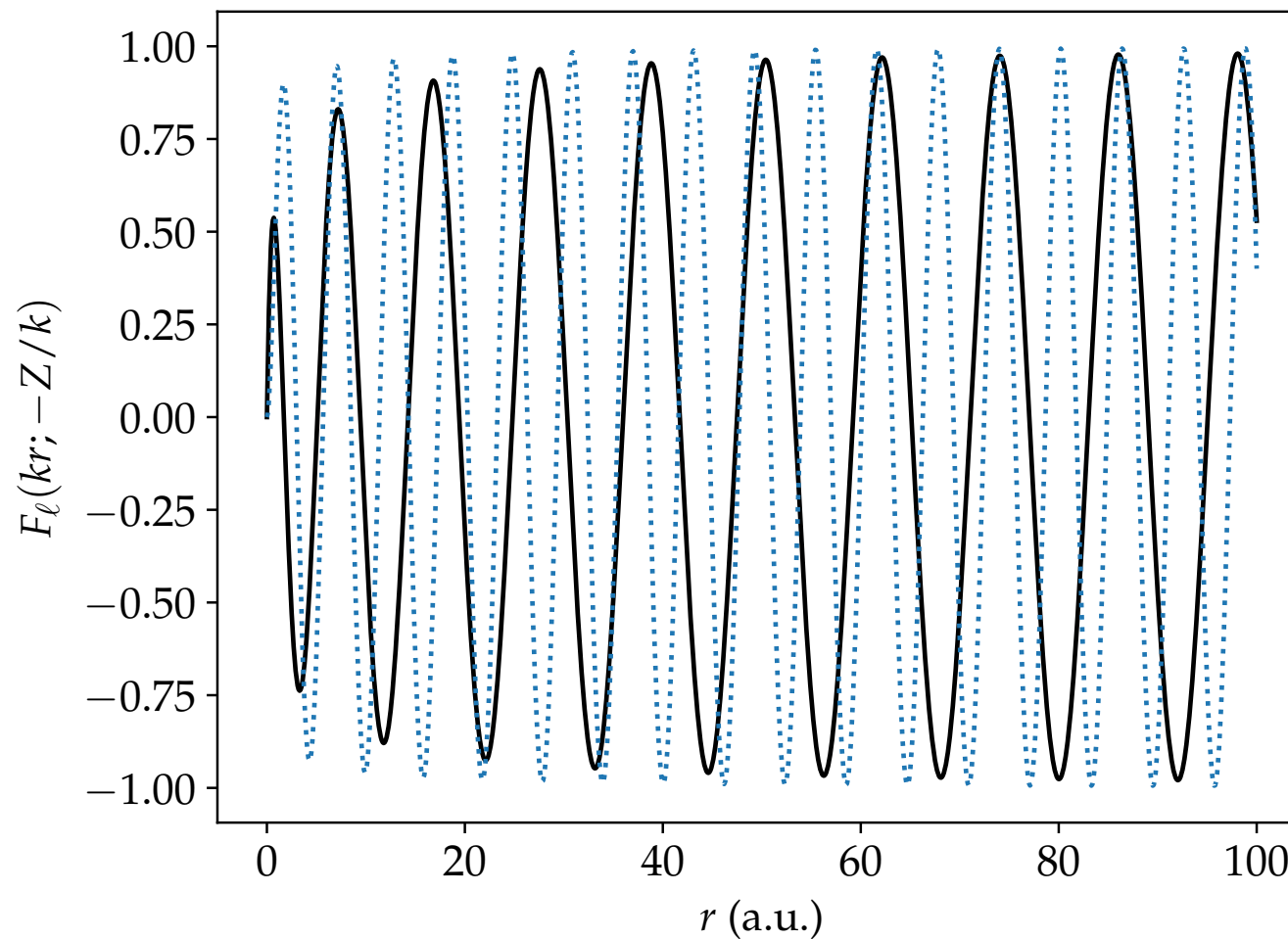
$$F_{\ell}(\rho; \eta) \sim \sin\{\rho - \eta \ln(2\rho) - \ell\pi/2 + \sigma_{\ell}\},$$

$${}_1F_1(a, b; z) = \sum_n \frac{(a)_n z^n}{(b)_n n!}.$$

Pochhammerjev simbol: $(a)_n = (a + n - 1)(a + n - 2) \cdots a = \Gamma(a + n)/\Gamma(a)$, $(-a)_n = (-1)^n (a - n + 1)_n$.

Coulombski potencial, II.

- Radialni coulombski funkciji za vodikov atom ($Z = 1$) in $\ell = 0$, $k = 0.5$ a.u. (črna) in $\ell = 1$, $k = 1.0$ (modra pikčasta):



Zgled: fotoionizacija – vodikov atom, I.

- Amplitudo za fotoionizacijo opisuje matrični element ($D = \hat{\mathbf{e}} \cdot \mathbf{r}$ ali $D = \hat{\mathbf{e}} \cdot \mathbf{p}$)

$$\begin{aligned}\mathcal{M}(\mathbf{k}) &= \langle \psi_{\mathbf{k}}^- | D | \phi_0 \rangle_{k=k_i}, \\ E_0 + \hbar\omega &= \frac{k_i^2}{2}, \\ \psi_{\mathbf{k}}^-(\mathbf{r}) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l i^l e^{-i\sigma_l} \frac{F_l(kr; \eta)}{kr} Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{r}}) Y_{lm}(\hat{\mathbf{k}})\end{aligned}$$

kjer je $\psi_{\mathbf{k}}^- = \{\psi_{-\mathbf{k}}^+\}^*$. (Pozor, asimptotika “–”, gl. [2, 6, 7]. Ta asimptotika omogoča interpretacijo amplitude \mathcal{M} glede na “nemodificirane” valove [6].) Uporabili smo $Y_{lm}(-\hat{\mathbf{k}}) = (-1)^l Y_{lm}(\hat{\mathbf{k}})$.

- Diferencialni fotoionizacijski presek:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \propto |\mathcal{M}(\mathbf{k})|^2.$$

- Alternativni matrični element: $\bar{\mathcal{M}}(\mathbf{k}) = \langle \phi_0 | D | \psi_{\mathbf{k}}^+ \rangle_{k=k_i}$.

Zgled: fotoionizacija – vodikov atom, II.

- \mathcal{M} lahko zapišemo z vrsto:

$$\mathcal{M}(\mathbf{k}) = \sum_{\ell,m} \mathcal{M}_{\ell,m} Y_{\ell,m}(\hat{\mathbf{k}}).$$

- Kotne porazdelitve fotoelektronov – diferencialni sipalni presek je sorazmeren

$$|\mathcal{M}(\mathbf{k})|^2 = \sum_{\ell,m} \sum_{\ell',m'} \mathcal{M}_{\ell,m} \mathcal{M}_{\ell',m'}^* Y_{\ell,m}(\hat{\mathbf{k}}) Y_{\ell',m'}^*(\hat{\mathbf{k}}).$$

- Uporabimo $Y_{\ell m}^* = (-1)^m Y_{\ell, -m}$ in spodnjo enakost, da se znebimo produkta sfernih funkcij (gl. liste s formulami):

$$C_{\alpha}^a(\hat{\mathbf{r}}) C_{\beta}^b(\hat{\mathbf{r}}) = \sum_{c,\gamma} (-1)^{\gamma} [c] \begin{pmatrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & -\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} C_{\gamma}^c(\hat{\mathbf{r}}),$$

$$Y_{a\alpha}(\hat{\mathbf{r}}) Y_{b\beta}(\hat{\mathbf{r}}) = \sqrt{\frac{[a, b, c]}{4\pi}} \sum_{c,\gamma} (-1)^{\gamma} \begin{pmatrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & -\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} Y_{\gamma}^c(\hat{\mathbf{r}}),$$

$$\text{Oznaki: } [a, b, \dots] = (2a + 1)(2b + 1) \dots, \quad C_q^k(\hat{\mathbf{r}}) = \sqrt{\frac{4\pi}{[k]}} Y_{kq}(\hat{\mathbf{r}}).$$

Zgled: fotoionizacija – vodikov atom, III.

- Velja:

$$\begin{aligned}
 |\mathcal{M}(\mathbf{k})|^2 &= \sum_{\ell,m} \sum_{\ell',m'} \mathcal{M}_{\ell,m} \mathcal{M}_{\ell',m'}^* (-1)^{m'} Y_{\ell,m}(\hat{\mathbf{k}}) Y_{\ell',-m'}(\hat{\mathbf{k}}) \\
 &= \sum_{\ell,m} \sum_{\ell',m'} \sum_{M,L} \mathcal{M}_{\ell,m} \mathcal{M}_{\ell',m'}^* (-1)^{m'} \sqrt{\frac{[\ell, \ell', L]}{4\pi}} (-1)^M \begin{pmatrix} \ell & \ell' & L \\ m & -m' & -M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell & \ell' & L \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} Y_{LM}(\hat{\mathbf{k}}).
 \end{aligned}$$

- V našem primeru bomo začeli z osnovnim stanjem ($\ell_0 = m_0 = 0$) z linearno polarizirano svetlobo ($\hat{\mathbf{e}} = \hat{\mathbf{z}}$, $q = 0$). V vsoti je tako prisoten le en člen ($\ell = 1, m = 0$), tako da je $M = 0$. Ker mora biti vsota $\ell + \ell' + L$ soda, je (zaradi trikotniškega pravila) L omejen na 0 ali 2. Kotno porazdelitev zato zapišemo kot:

$$\begin{aligned}
 \frac{d\sigma}{d\Omega} &\propto |\mathcal{M}(\mathbf{k})|^2, \\
 \frac{d\sigma}{d\Omega} &\equiv A_0 P_0(\cos \theta) + A_2 P_2(\cos \theta) = A_0 + A_2 P_2(\cos \theta),
 \end{aligned}$$

saj je $\sqrt{(2\ell + 1)/(4\pi)} P_\ell(\cos \theta) = Y_{\ell,0}(\theta, \phi)$ in $P_0(\cos \theta) = 1$.

Zgled: fotoionizacija – vodikov atom, IV.

- Velikokrat vpeljemo *parameter asimetrije* (tule $\beta_2 = A_2/A_0$):

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \equiv \frac{\sigma}{4\pi} \{1 + \beta_2 P_2(\cos \theta)\},$$

σ označuje celotni (integrirani) presek.

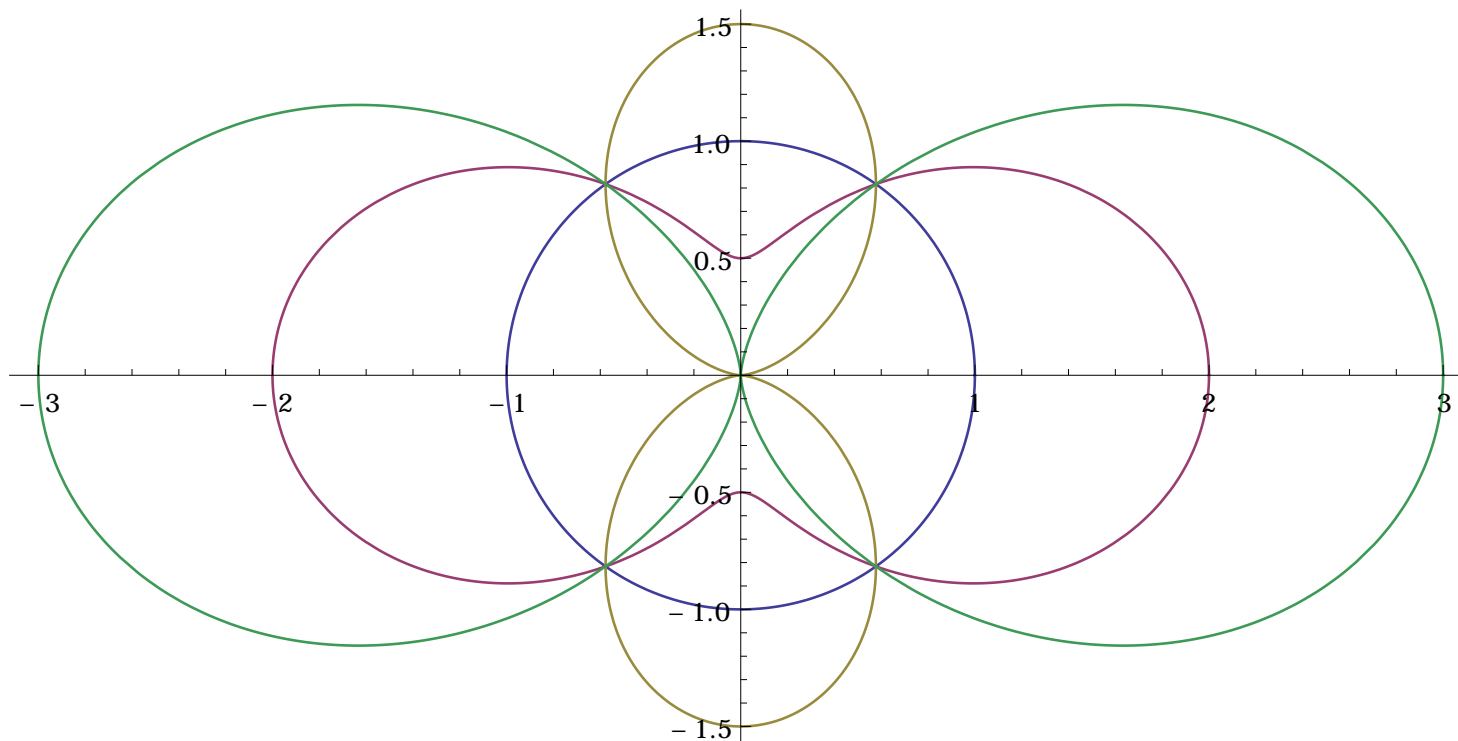
- Pri procesih višjega reda (nedipolni prehodi, elektronsko sipanje):

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \equiv \frac{\sigma}{4\pi} \{1 + \beta_2 P_2(\cos \theta) + \beta_4 P_4(\cos \theta) + \dots\}.$$

- Zgornji formuli veljata tudi pri težjih atomih. Kadar proces nima cilindrične simetrije, se pojavi odvisnost od ϕ , porazdelitev pa opišemo s sfernimi funkcijami z $M \neq 0$.

Parameter β_2

- modra – $\beta_2 = 0$; vijolična – $\beta_2 = 1$; rumena – $\beta_2 = -1$; zelena – $\beta_2 = 2$:



Coulombski p. + p. kratkega dosega (2-e⁻ atomi), I.

- Tu nas zanimajo kontinuumska stanja, ki niso sklopljena, ker načeloma lahko po ionizaciji (razpadu na fragmente) določimo kvantna števila iona (tirno in spinsko vrtilno količino, obe projekciji) in fotoelektrona (npr. projekcijo spinske vrtilne količine). Tu spinskih delov ne izpisujemo zaradi preglednosti (\mathcal{A} označuje antisimetrizacijo):

$$\begin{aligned}\hat{\Psi}_{\gamma}^{-}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) &= \mathcal{A} \phi_{n_c l_c m_c}(\mathbf{r}_1) \psi_{\ell, m, \mathbf{k}}^{-}(\mathbf{r}_2), \\ \phi_{n_c l_c m_c}(\mathbf{r}_1) &= R_{n_c l_c}(r_1) Y_{\ell_c m_c}(\hat{\mathbf{r}}_1), \\ \psi_{\ell, m, \mathbf{k}}^{-}(\mathbf{r}_2) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} i^{\ell} e^{-i\sigma_{\ell}} e^{-i\delta_{\gamma}} R_{k\gamma}(r) Y_{\ell m}^*(\hat{\mathbf{r}}) Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{k}}).\end{aligned}$$

Poleg coulombskega faznega premika imamo še premik zaradi potenciala kratkega dosega, γ označuje vsa kvantna števila, indeks c pa kvantna števila atomske sredice (torej iona). Modificirana coulombska funkcija $R_{k\gamma}(r)$ se asimptotsko obnaša kot:

$$\begin{aligned}kr R_{k\gamma}(r) &\sim \cos \delta_{\gamma} F_{\ell}(kr) + \sin \delta_{\gamma} G_{\ell}(kr), \\ F_{\ell}(\rho; \eta) &\sim \sin\{\rho - \eta \ln(2\rho) - \ell\pi/2 + \sigma_{\ell}\}, \\ G_{\ell}(\rho; \eta) &\sim \cos\{\rho - \eta \ln(2\rho) - \ell\pi/2 + \sigma_{\ell}\}.\end{aligned}$$

F_{ℓ} in G_{ℓ} sta regularna in iregularna coulombska funkcija.

Coulombski p. + p. kratkega dosega (2-e⁻ atomi), II.

- Produktno valovno funkcijo lahko izrazimo s *sklopljeno antisimetrično* valovno funkcijo:

$$\Psi_{\ell_c \ell L M_L}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \sum_{m_c, m} (\ell_c m_c \ell m | L M_L) \hat{\Psi}_{\gamma}^{-}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2),$$
$$\hat{\Psi}_{\gamma}^{-}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \sum_{L, M_L} (\ell_c m_c \ell m | L M_L) \Psi_{\ell_c \ell L M_L}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2).$$

(Razklop z uporabo Clebsch-Gordanovih koeficientov, gl. liste s formulami.)

- Amplituda za fotoionizacijo:

$$\mathcal{M}(\mathbf{k}; m_c, m) = \langle \hat{\Psi}_{\gamma}^{-} | D | \phi_0 \rangle.$$

- Izračunamo diferencialni fotoionizacijski presek (če z detekcijo ne ločujemo stanj z različnimi projekcijami, po teh seštevamo):

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \propto \sum_{m_c, m} |\mathcal{M}(\mathbf{k}; m_c, m)|^2.$$

Coulombski p. + p. kratkega dosega (težji atomi), I.

• Kontinuumsko stanje kompleksnega atoma opišemo kot sklop valovne funkcije atomske sredice (iona) in (fazno premaknjene) coulombske funkcije elektrona. Načeloma so po ionizaciji (fragmentaciji v ion in elektron) merljiva kvantna števila iona (vključno s celotno vrtilno količino in njeno projekcijo) in elektrona (spin), zato nas bo zanimalo stanje (atomske enote!):

$$|\mathbf{k}; L^c, M_L^c, S^c, M_S^c; S; m_s\rangle = \sum_{L, M_L} \sum_{M_S} i^\ell e^{-i\sigma_\ell} e^{-i\delta_\gamma} Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{k}}) k^{-1/2} \times \\ (L^c, M_L^c, \ell, m | L, M_L)(S^c, M_S^c, 1/2, m_s | S, M_S) |\epsilon; \gamma\rangle$$

v katerem smo nesklopljeni produkt stanja sredice in kontinuumskega elektrona izrazili s sklopljenim antisimetričnim stanjem $|\epsilon; \gamma\rangle$. Oznake:

- L^c, M_L^c, S^c, M_S^c – kvantna števila atomske sredice
- ℓ, m, m_s – kvantna števila prostega elektrona
- L, M_L, S, M_S – kvanta števila rezultante
- γ, ϵ – vsa kvantna števila sklopljenega stanja, kinetična energija fotoelektrona
- $\sigma_\ell, \delta_\gamma$ – coulombski fazni premik, fazni premik zaradi potenciala kratkega dosega

Coulombski p. + p. kratkega dosega (težji atomi), II.

- Pripadajoča radialna funkcija se asimptotsko obnaša kot:

$$\begin{aligned}kr R_{k\gamma}(r) &\sim \cos \delta_\gamma F_\ell(kr) + \sin \delta_\gamma G_\ell(kr), \\F_\ell(\rho; \eta) &\sim \sin\{\rho - \eta \ln(2\rho) - \ell\pi/2 + \sigma_\ell\}, \\G_\ell(\rho; \eta) &\sim \cos\{\rho - \eta \ln(2\rho) - \ell\pi/2 + \sigma_\ell\}.\end{aligned}$$

F_ℓ in G_ℓ sta regularna in iregularna coulombska funkcija.

Literatura

- [1] E. Merzbacher, *Quantum Mechanics*, 3rd ed. (Wiley, New York, 1998).
- [2] C. J. Joachain, *Quantum Collision Theory* (North-Holland, Amsterdam, 1975).
- [3] J. J. Sakurai, *Modern quantum mechanics*, revised ed. (Addison-Wesley, Reading, MA, 1994).
- [4] M. Abramowitz and I. A. Stegun, eds., *Handbook of Mathematical Functions* (Dover, New York, 1972).
- [5] F. W. J. Olver, D. W. Lozier, R. F. Boisvert, and C. W. Clark, eds., *NIST Handbook of Mathematical Functions* (Cambridge University, New York, 2010).
- [6] G. Breit and H. A. Bethe, *Phys. Rev.* **93**, 888 (1954).
- [7] I. Adawi, *Am. J. Phys.* **32**, 211 (1964).