4. kolokvij iz Matematične fizike II v šolskem letu 2011/12

18.1.2012

Počrnjena krogelna lupina s polmerom 10 cm in tanko, 1 mm debelo pločevinasto steno stoji na ledu, tako da se dotika ledene ploskve s stalno temperaturo v majhnem stičnem krožcu. Lupino greje sonce s toplotnim tokom 500 W/m^2 v navpični smeri. Kolikšna je najvišja temperatura lupine v stacionarnem stanju?
(Fe: λ=74 W/m/K.)

Najprej zapišemo v matematični obliki razmazan toplotni izvir z močjo $j_0\pi R^2 = \int q dV$ po gornji polobli ter vpeljemo obročast toplotni ponor z enako močjo, s katerim "opašemo" lupino pri kotu θ_0:

$$q = \frac{j_0 \cos\theta}{d}|_{0\le\theta\le\pi/2} - \frac{j_0}{2d}\delta(\cos\theta - \cos\theta_0).$$

Pri gretju je $dP = \vec{j_0}d\vec{S} = j_0 \cos\theta dV/d$, izraz za gostoto moči hlajenja pa je očiten, ko preverimo, da je res $\int q dV = -j_0\pi R^2$. Enačbo $\nabla^2 T(\theta) = -q/\lambda$ rešujemo tako, da najprej razvijemo levo stran enačbe

$$-\frac{q}{\lambda} = \sum_l B_l P_l(\cos\theta), \quad B_l = \frac{j_0(2l+1)}{2\lambda d}[-\int_0^1 x P_l(x)dx + P_l(\cos\theta_0)/2].$$

Vrednost integrala, ki je različen od nič za $l = 0, 1, 2, 4, 6, 8...$ izračunamo po formuli

$$\int_0^1 x P_l(x)dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4\Gamma(3/2 - l/2)\Gamma(2 + l/2)}.$$

Temperaturno odvisnost podaja

$$T(\theta) = \sum_l A_l P_l(\cos\theta) = -\sum_l \frac{B_l}{k_l^2} P_l(\cos\theta) = -R^2 \sum_l \frac{B_l}{l(l+1)} P_l(\cos\theta),$$

pri čemer smo predpostavili, da se temperatura vzdolž debeline lupine pri danem kotu θ nič ne spreminja. Ker je $B_0 = 0$, v gornjem razvoju ne nastopa konstanta ($A_0 = 0$). Naloga sprašuje po razliki temperatur med obema poloma krogle. Očitno bo v stacionarnem stanju temperatura lupine za kote $\theta > \theta_0$ kar enaka kot $T(\theta_0)$, ker pod hladilno zanko ni nobenih izvirov toplote. Maksimalna temperatura lupine glede na znano konstantno temperaturo hladilne zanke $T(\theta_0)$ je torej

$$\triangle T(\theta_0) = T(0) - T(\theta_0),$$

tako da je

$$\begin{aligned}
\triangle T(\theta_0) &= \sum_l A_l(1 - P_l(\cos\theta_0)), \\
&= \frac{j_0 R^2}{2\lambda d}\Big[\sum_{l=1,2,4,6,8..} \frac{(2l+1)}{4l(l+1)} \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(3/2 - l/2)\Gamma(2 + l/2)}(1 - P_l(\cos\theta_0)) \\
&\qquad - \sum_l \frac{(2l+1)}{2l(l+1)} P_l(\cos\theta_0)(1 - P_l(\cos\theta_0))\Big].
\end{aligned}$$

V limiti se splača razbiti koeficiente na dva dela, ki izvirata iz gretja in hlajenja. V grelnem prispevku so namreč na polu (ki je, kot rečeno, pri isti temperaturi kot zanka) vsi sodi prispevki k razliki enaki nič, ker je $P_l(1) = P_l(-1)$ in prispeva le edini od nič različni lihi prispevek $l = 1$. Seveda so hladilni prispevki za vse l različni od nič vendar tudi tam prispevajo k razliki le lihi l in sicer dvakratno, ker je $P_l(1) = -P_l(-1)$. V limiti $\theta_0 \to \pi$, ko se obroč skrči v točko, je torej mogoče gornji izraz poenostaviti v

$$\triangle T(\pi) = \frac{j_0 R^2}{2\lambda d}\Big[1 + \sum_{l \text{ lih}} \frac{2l+1}{l(l+1)}\Big].$$

Izkaže se, da vsota divergira, tako da je temperaturna razlika odvisna od l_{max}, od maksimalnega indeksa, do katerega seštevamo:

$$\triangle T(\pi, l_{max}) = \frac{j_0 R^2}{2\lambda d}[1 + \frac{\gamma}{2} + \ln(2\sqrt{\frac{1}{2} + l_{max}})]$$

Zgoraj je $\gamma = 0.5772156649$ Eulerjeva konstanta. Ta ugotovitev ni zares presenetljiva, ker neskončno majhno območje na polu pač ne more prenašati končno velike moči, ne da bi temperatura (in z njo gradient, ki določa tok) narasli v neskončnost. Območje, skozi katerega teče tok se manjša sorazmerno s $\triangle\theta = \pi - \theta_0$, tok pa je členoma sorazmeren s $\triangle\theta dP_l/dx|_{x_0} \approx 2l(l+1)/(2l+1)/\triangle\theta$. Ker v grelnem delu koeficienti v vsoti še zmerom padajo proti nič zaradi funkcij Γ v imenovalcu, tisti del v vsoti dovoljuje prenos končne moči. Pri majhnem $\triangle\theta$ v hladilnem delu pa so koeficienti konstantni tako da tok (in temperatura) na polu res narasteta preko vseh mej. Zato je treba zares definirati (majhen) radij krožca, torej kot θ_0 nekoliko manjši od π, če naj bo temperaturna razlika dobro določena. Če je $\theta_0 \approx \pi$, je

$$\triangle T \approx \frac{j_0 R^2}{2\lambda d}[1 - \sum_{l \text{ lih}} \frac{2l+1}{2l(l+1)} P_l(\cos\theta_0))]$$

Ko je $\theta_0 = 0.99\pi$, je za tri mesta natančnosti potrebno sešteti okrog 200 členov gornje vrste da dobimo

$$\triangle T(0.99\pi) \approx 173^o\mathrm{C}.$$

Če bi z istim številom clenov v vsoti izračunali temperaturo točno pri $\theta_0 = \pi$, bi dobili vrednost 279^oC, seveda pa bi temperaturna razlika približno logaritemsko rasla s številom členov v vsoti.

Poglejmo še, kakšna bi bila temperaturna razlika, če bi imeli na ledu polkroglo. Ker je $P_l(0) = 0$ za lihe l, za sode l pa velja

$$P_l(0) = -\frac{l!}{2^l[(l/2)!]^2},$$

bi v našem drugem limitnem primeru dobili

$$\triangle T(\pi/2) = \frac{j_0 R^2}{2\lambda d}\Big[\frac{1}{2} + \sum_{l=2,4,6,8..} \frac{(2l+1)}{2l(l+1)}\Big(\frac{\sqrt{\pi}}{2\Gamma(3/2 - l/2)\Gamma(2 + l/2)} + \frac{l!}{2^l[(l/2)!]^2}\Big)(1 + \frac{l!}{2^l[(l/2)!]^2})\Big].$$

Za naše podatke je $\triangle T(\pi/2) \approx 48.7^o$C, za spodobno konvergenco pa je treba sešteti vsaj 200 členov gornje vrste.